

## NOTIZEN

Zur Ableitung der Londonschen Gleichungen  
der Supraleitung

Von A. HAUG und W. FENEBERG

Institut für Theoretische Physik der T. H. München  
(Z. Naturforschg. 15 a, 641–642 [1960]; eingegangen am 10. Mai 1960)

Die phänomenologische Theorie der Supraleitung beruht im wesentlichen auf den Londonschen Gleichungen, die zusätzlich zur MAXWELLSchen Elektrodynamik hinzukommen. Diese LONDONSchen Gleichungen gelten als etwas grundsätzlich Neues, als eine Erweiterung der MAXWELLSchen Theorie, die über diese hinausführt. Demgegenüber soll hier gezeigt werden, daß sich die LONDONSchen Gleichungen in gewissem Sinne aus der MAXWELLSchen Theorie ableiten lassen, wenn man die üblichen Potentiale einführt und diesen eine geeignete Nebenbedingung auferlegt. Dieses Verfahren ist dem der Ableitung der Wellengleichung ähnlich, bei dem die LORENTZ-Konvention als Zusatzbedingung notwendig ist.

Die eine der MAXWELLSchen Gleichungen, die in relativistischer Schreibweise

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (1)$$

lautet, wird bekanntlich durch die Einführung der Potentiale  $A_\mu$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad (2)$$

befriedigt. Die andere MAXWELLSche Gleichung

$$\partial F_{\mu\nu}/\partial x_\nu = j_\mu^0, \quad (3)$$

in der  $j_\mu^0$  den normalen OHMSchen Strom darstellt, läßt sich aus einem Variationsprinzip

$$\delta \int L \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, dx_4 = 0 \quad (4)$$

gewinnen; dabei sind die Potentiale in der LAGRANGE-Funktion  $L$  des elektromagnetischen Feldes zu variieren. In ähnlicher Weise kann man die LONDONSchen Gleichungen aus der MAXWELLSchen Theorie ableiten, wenn man den Potentialen die Nebenbedingung

$$A_\mu A_\mu = -k^2 \quad (5)$$

(mit festem  $k^2$ ) auferlegt, die zuerst von DIRAC<sup>1</sup> in anderem Zusammenhang eingeführt wurde. Diese Nebenbedingung ist mit einem LAGRANGE-Multiplikator zur LAGRANGE-Funktion des elektromagnetischen Feldes hinzunehmen, so daß  $L$  nunmehr lautet

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j_\mu^0 A_\mu + \frac{1}{2} l (A_\mu A_\mu + k^2). \quad (6)$$

Die Durchführung der Variation (4) ergibt dann

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = j_\mu^0 + l A_\mu = j_\mu^0 + j_\mu^s = j_\mu. \quad (7)$$

<sup>1</sup> P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc., Lond. A **209**, 291 [1951].

<sup>2</sup> J. BARDEEN, Handb. der Physik (S. Flügge), Bd. XV, S. 274.

Das Glied  $l A_\mu$ , das hier neu auftritt, folgt unmittelbar aus der Nebenbedingung (5); es läßt sich als ein zusätzlicher Strom  $j_\mu^s$  („Suprastrom“) interpretieren, der zusammen mit dem OHMSchen Strom  $j_\mu^0$  den Gesamtstrom  $j_\mu$  ergibt. Setzt man die neu gewonnene Beziehung in der Form

$$A_\mu = -\frac{c^2}{4\pi} \lambda j_\mu^s \quad (8)$$

( $\lambda = -4\pi/c^2 l$ ;  $c$  = Lichtgeschwindigkeit) in die Bestimmungsgleichung (2) der Potentiale ein, so ergibt sich

$$F_{\mu\nu} = \frac{c^2}{4\pi} \left[ \frac{\partial (\lambda j_\mu^s)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial (\lambda j_\nu^s)}{\partial x_\mu} \right]. \quad (9)$$

In klassischer Schreibweise heißt dies

$$\mathfrak{H} = -c \operatorname{rot}(\lambda \mathfrak{J}_s); \quad \mathfrak{E} = \frac{\partial (\lambda \mathfrak{J}_s)}{\partial t} + c^2 \operatorname{grad}(\lambda \varrho_s) \quad (10)$$

$$\left( F_{\mu\nu} = \{\mathfrak{H}, -i\mathfrak{E}\}; \quad j_\mu^s = \left\{ \frac{4\pi}{c} \mathfrak{J}_s, 4\pi i \varrho_s \right\} \right).$$

Bis auf das Gradientenglied sind diese Gleichungen genau die LONDONSchen Gleichungen der Supraleitung, wobei  $\lambda$  den Charakter der LONDONSchen Konstanten annimmt. Dieses Gradientenglied kann man vermeiden, wenn man die einfache Nebenbedingung (5) durch die kompliziertere Beziehung

$$\mathfrak{A}^2 + 2c \mathfrak{A} \operatorname{grad} \int \Phi \, dt + f(\Phi) = -k^2 \quad (11)$$

ersetzt. Da diese im Gegensatz zu (5) nicht relativistisch invariant ist, wurde hier das Viererpotential in das Vektor- und das skalare Potential zerlegt:  $A_\mu = \{\mathfrak{A}, i\Phi\}$ .  $f(\Phi)$  ist eine beliebige Funktion von  $\Phi$ . Führt man nun wie vorher die Variation mit dieser Nebenbedingung durch, so erhält man (10) ohne das Gradientenglied. Somit ist gezeigt, daß man die LONDONSchen Gleichungen mit Hilfe der Nebenbedingung (5) bzw. (11) aus der MAXWELLSchen Theorie ableiten kann. Sie werden dabei der Definitionsgleichung der Potentiale äquivalent. Daher ist die MAXWELLSche Gl. (1) in ihnen enthalten, während (3) die erweiterte Form (7) annimmt. Im Falle der Nebenbedingung (5) stimmen die Potentiale mit dem sog. Supraimpuls überein. Das wesentlich Neue sind also hier nicht die LONDONSchen Gleichungen, sondern die Beziehung (8) für den Suprastrom, die bekanntlich den Ausgangspunkt der atomistischen Theorien bildet. Während sie bisher nur unter sehr speziellen Bedingungen begründet werden konnte<sup>2</sup>, folgt sie hier ganz allgemein.

Das Gradientenglied in (10) wurde schon mehrfach diskutiert<sup>3</sup>. Für die Deutung der Experimente ist es unwesentlich. Wenn man es daher im allgemeinen wegläßt, so spricht dafür die größere Einfachheit der zweiten Gl. (10). Wenn man es dagegen hinzunimmt, so werden die LONDONSchen Gleichungen relativistisch in-

<sup>3</sup> F. BOPP, Z. Phys. **107**, 623 [1937]. — F. BECK, Naturw. **39**, 254 [1952].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

variant und lassen sich zu der in diesem Sinne wesentlich einfacheren Gl. (9) zusammenfassen. Wegen dieser relativistischen Invarianz ist die Fassung (10) der üblichen Form vorzuziehen.

Bei unserer Ableitung erscheint der Suprastrom als reiner Feldstrom, im Gegensatz zum OHMSchen Strom, der extra eingeführt werden muß. Die LONDONSchen Gleichungen sind daher als Feldgleichungen, nicht als Materialgleichungen aufzufassen. Dies entspricht der Tatsache, daß die Energie des Suprastroms den Charakter einer Feldenergie hat und keinen Beitrag zur JOULESchen Wärme liefert. Trotz dieses verschiedenen Charakters bilden OHMScher und Suprastrom insofern eine Einheit, als nach (7) nur für die Summe aus beiden, nämlich den Gesamtstrom, eine Kontinuitätsgleichung gilt. Dies ist wesentlich natürlicher als getrennte Kontinuitätsgleichungen für die Einzelströme, wie sie gelegentlich gefordert werden<sup>4</sup>.

Die Nebenbedingung (5) bzw. (11) wird hier wie bei DIRAC<sup>1</sup> dazu eingeführt, um ein neues physikalisches Phänomen in der MAXWELLSchen Theorie unterzubringen. Im Gegensatz zu DIRAC, der dabei an den normalen, OHMSchen Elektronenstrom dachte, ist hier die Supraleitung gemeint, für die die gewonnenen Beziehungen ganz unmittelbar gelten. Während DIRAC als Kern seiner Methode die Zerstörung der Eichinvarianz der Potentiale durch die Nebenbedingung (5) betrachtete, ist unser Verfahren nicht unbedingt an eine Einschränkung

der Eichinvarianz gebunden. Durch eine geeignete Wahl  $f(\Phi) = [c \operatorname{grad} \int \Phi dt]^2$  läßt sich nämlich (11) in die eichinvariante Form

$$(\mathcal{A} + c \operatorname{grad} \int \Phi dt)^2 = -k^2 \quad (12)$$

bringen, die natürlich genauso zu den LONDONSchen Gleichungen führt. Hier ist also nur wichtig, daß die Nebenbedingung den Anlaß zur Einführung eines LAGRANGE-Multiplikators bildet, der den Charakter einer neuen Feldgröße zur Beschreibung der Supraleitung annimmt und zu einer Erweiterung der LAGRANGE-Funktion des elektromagnetischen Feldes führt.

Der zunächst unbestimmten Größe  $k^2$ , die implizit in  $l$  bzw.  $\lambda$  wieder auftreten muß, kann man eine physikalische Bedeutung beilegen, wenn man zu einer atomistischen Betrachtungsweise übergeht. Hier kann man sich unmittelbar an DIRAC<sup>1</sup> bzw. HÖHLER<sup>5</sup> anschließen; dann erhält man  $\lambda = m/n e^2$ , in Übereinstimmung mit dem üblichen Wert der LONDONSchen Konstanten ( $e$  = Ladung,  $m$  = Masse,  $n$  = Dichte der Elektronen). Hier kam es uns jedoch im wesentlichen nur darauf an zu zeigen, daß man die phänomenologischen LONDONSchen Gleichungen aus der phänomenologischen MAXWELLSchen Elektrodynamik gewinnen kann.

<sup>4</sup> M. VON LAUE, Theorie der Supraleitung, Springer-Verlag, Berlin 1949.

<sup>5</sup> G. HÖHLER, Ann. Phys., Lpz. 10, 196 [1952].

## Über eine einfache Anordnung zum Sichtbarmachen der Anregungszustände in Glimmstrecken und Entladungs-Lampen

Von M. WILK

Institut für organische Chemie der Universität Frankfurt/M.  
(Z. Naturforsch. 15 a, 642—643 [1960]; eingegangen am 6. Mai 1960)

Legt man nach Abb. 1 an die Außenwand einer mit Wechselstrom (50 Hz) betriebenen und gut abgeschirmten Glimmlampe eine Ableitanode und führt diese über einen Verstärker an die Vertikalplatten eines Oszilloskop, dessen Horizontalplatten mit einer linearen Kippspannung von 25 oder 50 Hz versorgt sind, so zei-

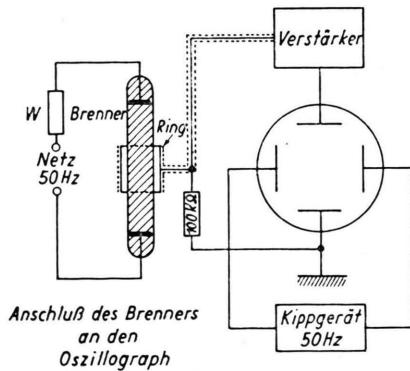


Abb. 1.

gen sich auf dem Bildschirm Kurven mit außerordentlich steilflankigen Impulsen von positiven und negativen Werten, die von einer sehr flach verlaufenden Sinuskurve (Betriebsspannung der Glimmlampe) ausgehen (Abb. 2). Dabei ist es gleichgültig ob die Lampe mit einem OHMSchen Widerstand oder mit einer Drosselspule betrieben wird.

Lage, Höhe und Form der Impulse hängen von der Lampenspannung, vom Füllgas der Glimmlampe und von deren Brenntemperatur ab.

Untersucht wurden die Osram-Spektrallampen: Cadmium, Natrium und Quecksilber, sowie eine gewöhnliche Signalglimmlampe.

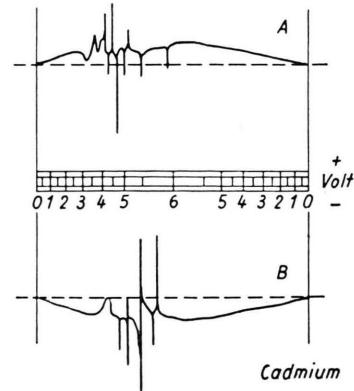


Abb. 2.